NYQUIST-OVI SLUČAJEVI (Drugi Nyqist-ov kriterijum)

I kod Drugog Nyquist-ovog kriterijuma postoji mogućnost da se proširi propusni opseg sistema. Ovdje razlog nije povezan sa fizičkom realizacijom (kao kod Prvog Nyquist-ovog kriterijuma kod koga je sistem minimalnog propusnog opsega ujedno i idealni sistem), već sa stvaranjem uslova za povećanje broja sistema koji zadovoljavaju Drugi Nyquist-ov kriterijum. Funkcije prenosa takvih sistema su oblika:

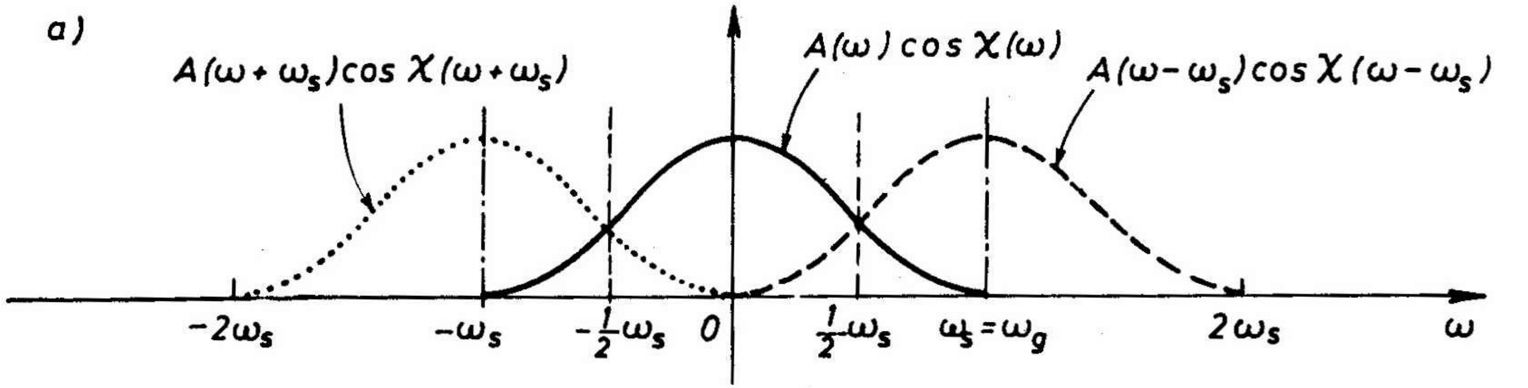
$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), & |\omega| \le \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases} \qquad \omega_c \le \omega_g \le 2\omega_c$$

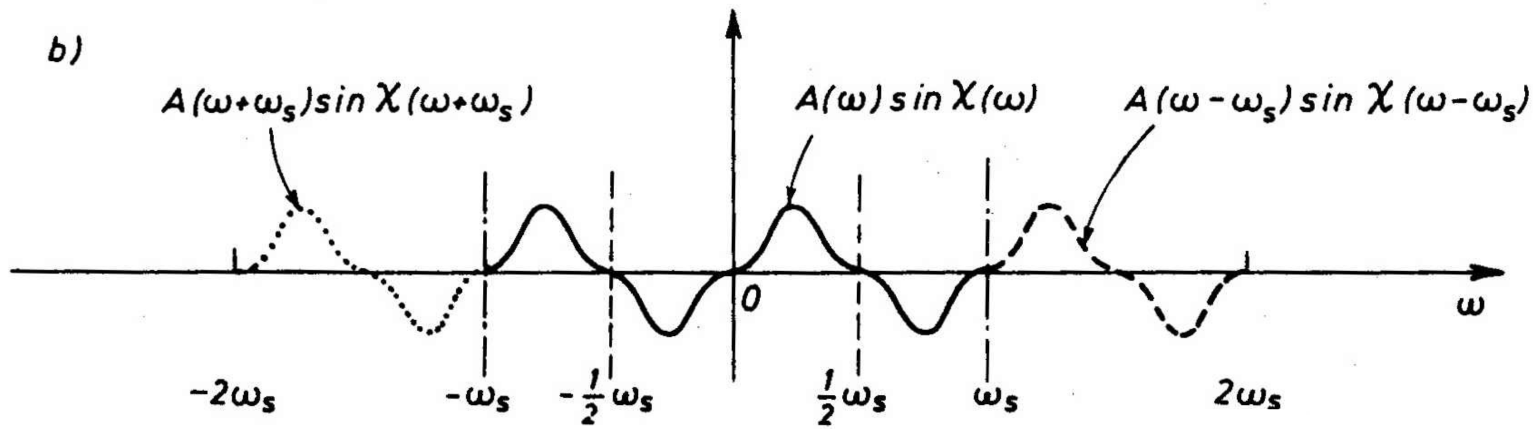
Opšti uslovi za realni i imaginarni dio karakteristike postaju oblika:

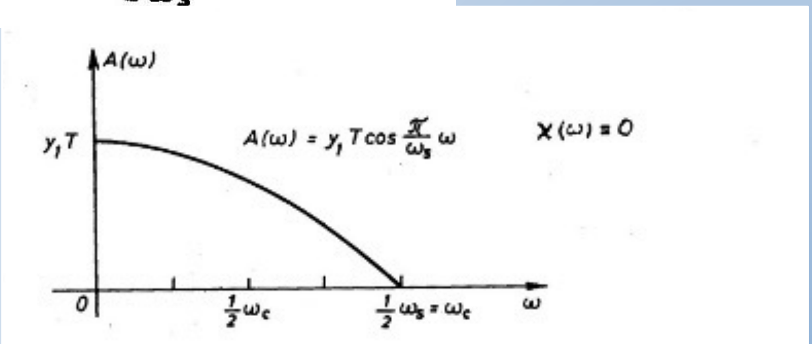
$$A(\omega)\cos\chi(\omega) - A(\omega-\omega_s)\cos\chi(\omega-\omega_s) = y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, \qquad 0 \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega)\sin\chi(\omega) - A(\omega-\omega_s)\sin\chi(\omega-\omega_s) = 0, \qquad 0 \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Jedan primjer funkcija prenosa koje spadaju u grupu Nyquist-ovih slučajeva po Drugom Nyquist-ovom kriterijumu:







I po Drugom Nyquist-ovom kriterijumu se za funkcije prenosa koje spadaju u Nyquist-ove slučajeve definišu **uslovi simetrije** tako da kriterijum bude zadovoljen: realnom dijelu karakteristike sistema sa minimalnim propusnim opsegom može da se superponira dodatak koji ima parnu simetriju u odnosu na pravu $\omega=\omega_s/2=\omega_c$, a imaginarnom dijelu neparno simetrično zaobljenje u odnosu na tačku $\omega=\omega_s/2=\omega_c$.

Jedna od funkcija koja zadovoljava ove uslove je funkcija prenosa ***"podignuti kosinus"***. Ona ima poseban značaj u prenosu digitalnih signala zato što ovakva funkcija prenosa zadovoljava i Prvi i Drugi Nyquist-ov kriterijum.

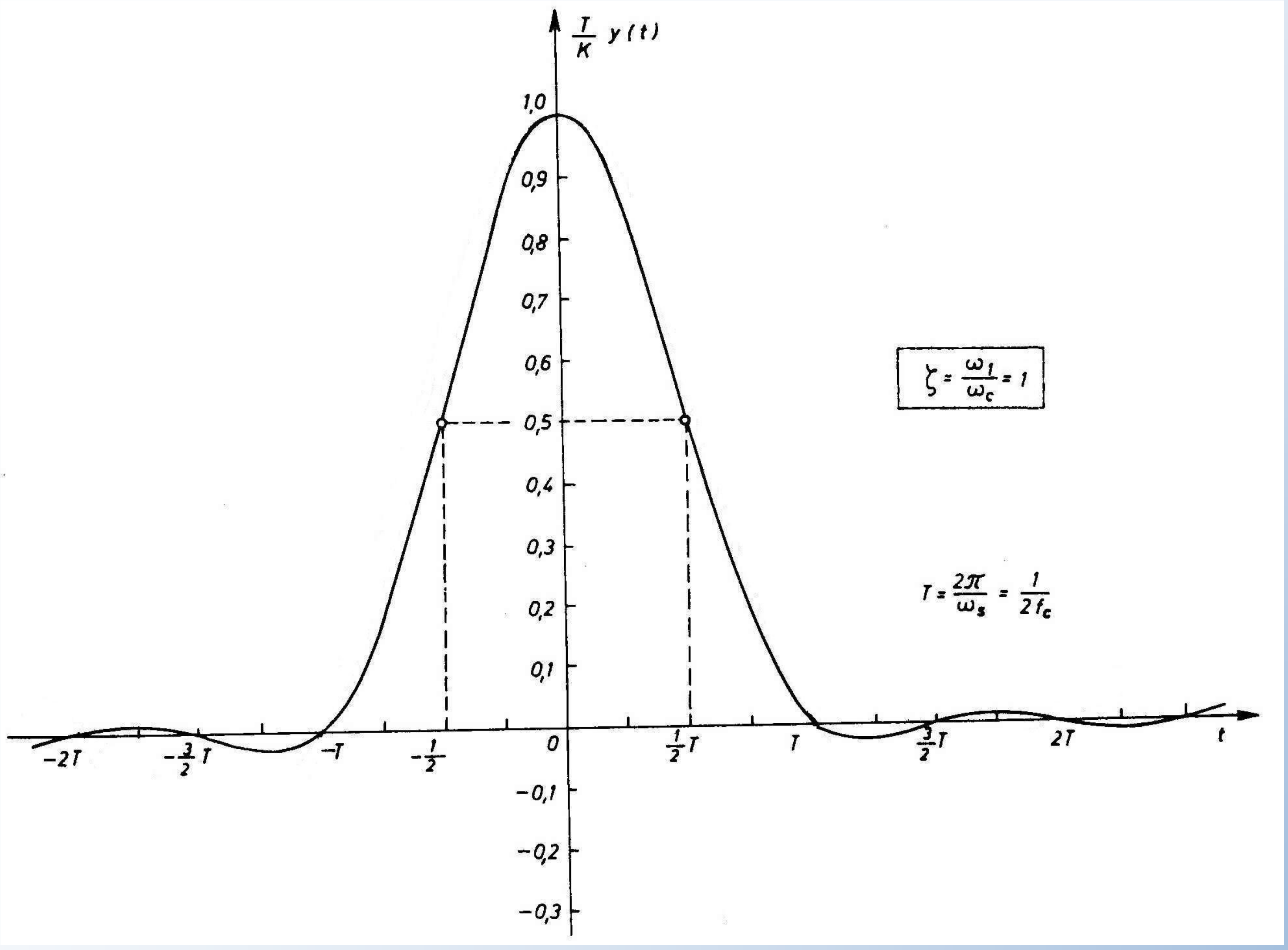
Pretpostavimo da je fazna karakteristika sistema $\chi(\omega)=0$, a amplitudska karakteristika:

$$A(\omega)=K\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega=\cos^2\frac{\pi}{2\omega_s}\omega, & |\omega|\le\omega_s=2\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_s\end{cases}$$

Kod ove funkcije *roll off* faktor je jednak jedinici, a impulsni odziv sistema je:

$$y(t)=\frac{K}{T}\frac{1}{1-(\frac{2\omega_c t}{\pi})^2}\frac{\sin 2\omega_c t}{2\omega_c t},\qquad \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}=y_0$$

Vidi se da je ispunjen Prvi Nyquist-ov kriterijum, tj. u trenutku T=0 funkcija ima maksimum, a u trenucima nT je jednaka nuli. Isto tako, u trenucima ±T/2 odziv ima polovinu svoje maksimalne vrijednosti, a u trenucima (2n+1)T/2 ima vrijednost nula, tj. zadovoljen je i Drugi Nyquist-ov kriterijum.



TREĆI NYQUIST-OV KRITERIJUM

Treći Nyquist-ov kriterijum govori o tome kako je moguće izbjeći uticaj intersimbolske interferencije kada se za značajan parametar signala izabere površina koju signal obuhvata u jednom signalizacionom intervalu. Naravno, tada ta površina predstavlja vrijednost signala i ona na prijemu može da se identifikuje prostom integracijom signala.

Ako sa $p(mT)$ označimo pomenutu površinu u m-tom signalizacionom intervalu koji zahvata period od [(2m-1)T/2, (2m+1)T/2], onda se Treći Nyquist-ov kriterijum može analitički formulisati na sledeći način:

$$p(mT) = \int_{(2m-1)\frac{T}{2}}^{(2m+1)\frac{T}{2}} y(t)dt = p_0 \delta_{m0}, \qquad \mathrm{m} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

<u>tj. površina koju obuhvata signal u *m*-tom signalizacionom intervalu treba da bude određena samo onim što je u tom signalizacionom intervalu bilo poslato.</u>

y(t) predstavlja, kao i do sada, standardni odziv sistema na standardnu pobudu x(t), a $\delta_{m,0}$ predstavlja Kroneckerovu deltu.

OPŠTI OBLIK STANDARDNOG SIGNALA

Postavlja se pitanje kako ostvariti Nyquist-ove kriterijume da nema intersimbolske interferencije i onda kada je standardni signal $x(\mathrm{t})$ dat u opštem obliku, tj. kada nije delta impuls.

U tom slučaju, Nyquist-ovi kriterijumi i uslovi koje oni zahtjevaju ostaće i dalje na snazi ako se obezbijedi da spektar standardnog signala na ulazu u sistem bude konstantan. To se može jednostavno uraditi tako što će se ispred sistema prenosa kaskadno vezati sklop koji modifikuje spektar standardnog signala i koji ima funkciju prenosa $H_X(j\omega)=1/X(j\omega)$ tako da se na njegovom izlazu dobije signal čiji je spektar identičan sa spektrom delta impulsa, tj. konstantan.

PRENOS SIGNALA KROZ REALNE KANALE I DIJAGRAM OKA

Neka se radi o prenosu u osnovnom opsegu učestanosti i neka na ulaz sistema dolazi digitalni signal:

$$u_u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(t - kT)$$

Odziv sistema na emitovani signal je:

$$u_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT)$$

Pošto se signalu u toku prenosa superponira i šum, rezultantni signal na ulazu sklopa za odlučivanje je:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT) + \eta(t)$$

Neka se odbirci uzimaju u trenucima t=*n*T:

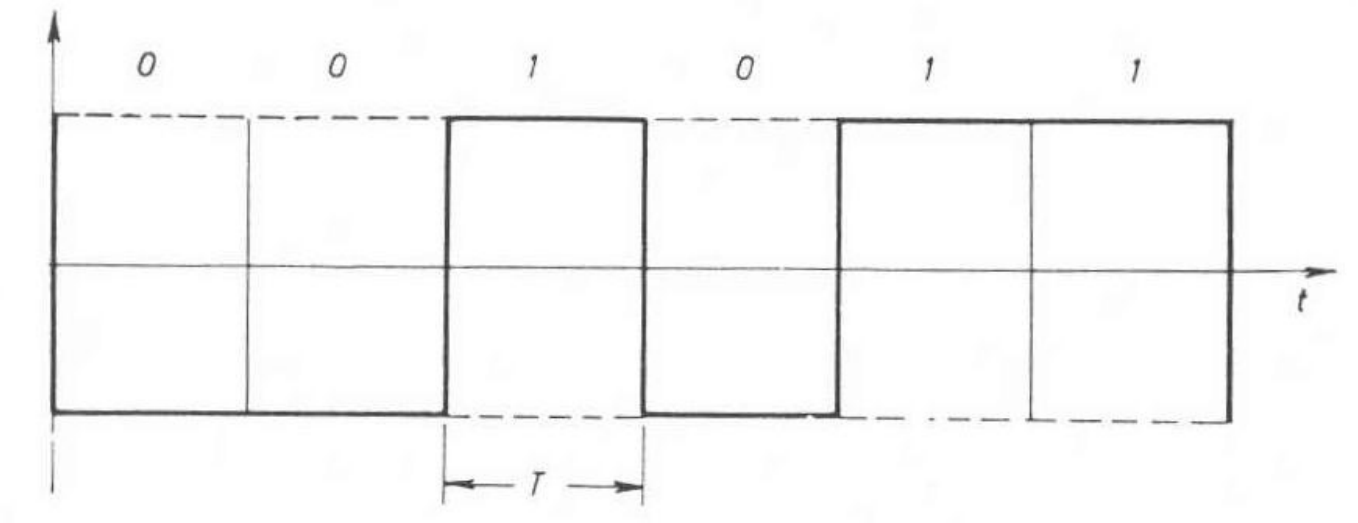
$$u(nT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(nT-kT)+\eta(nT)$$

Ovaj *n*-ti odbirak može da se piše i u obliku:

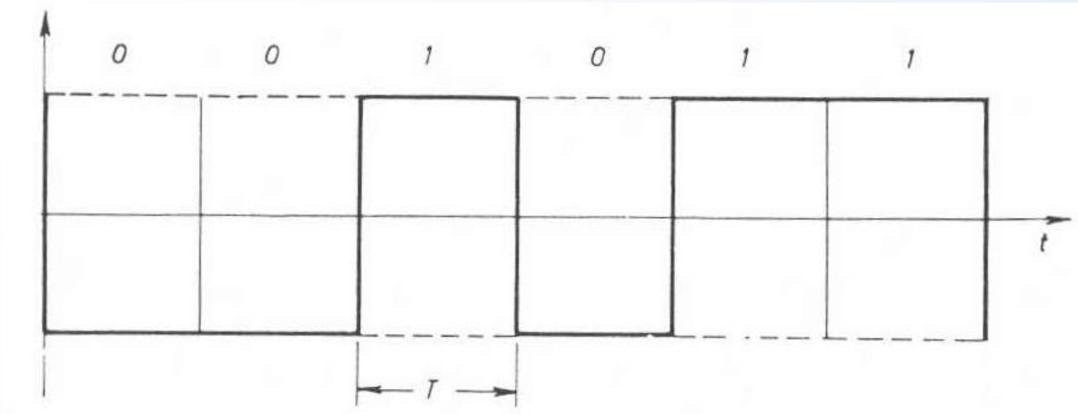
$$u_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{n-k}+\eta_n=a_n y_0+\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} a_k y_{n-k}+\eta_n$$

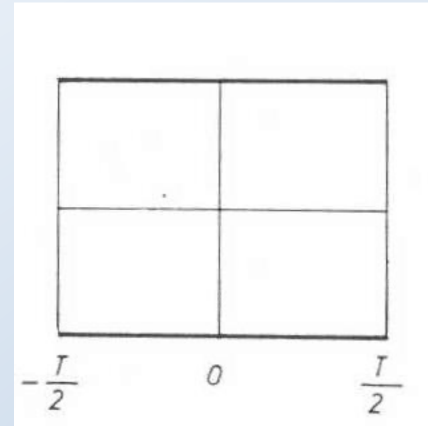
U slučaju da dio koji ne potiče od signala u n-tom intervalu nije jednak nuli jasno je da postoji ISI. Analiza prisutne ISI se eksperimentalno može izvršiti na relativno jednostavan i efikasan način pomoću tzv. ***dijagrama oka***.

Posmatrajmo povorku pravougaonih polarnih impulsa kao na slici.

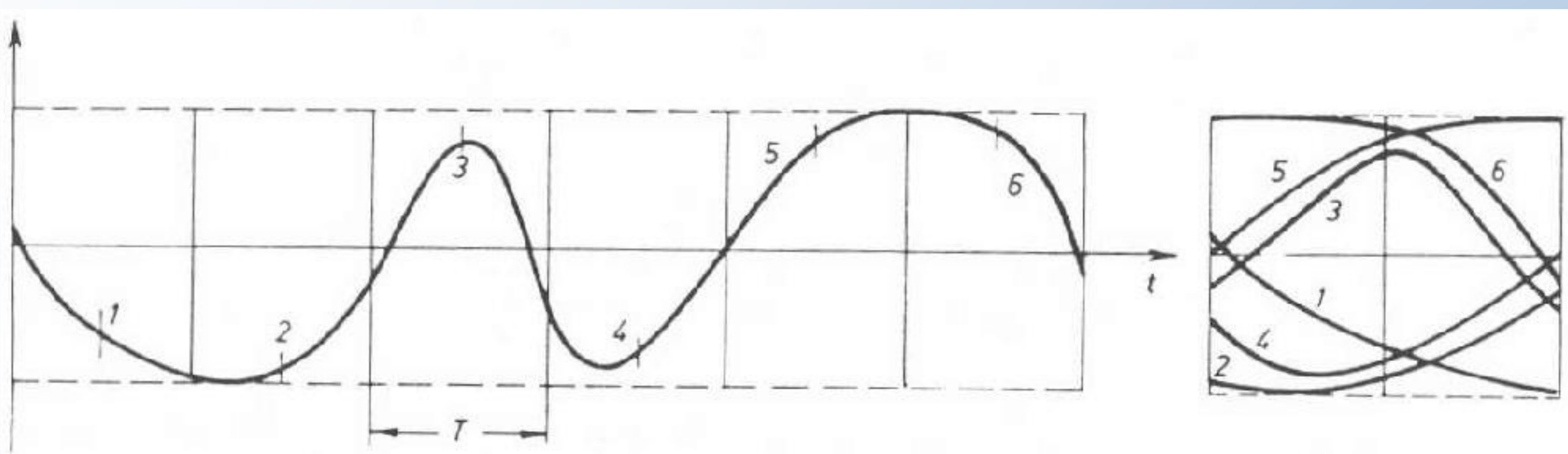


Ako bi ovakav signal doveli na ulaz osciloskopa čija je vremenska baza podešena trajanju jednog signalizacionog intervala T, onda bi se na njegovom ekranu dobio dijagram kao na slici desno. To su dvije deblje izvučene horizontalne linije nastale preklapanjem elemenata signala iz svih signalizacionih intervala.

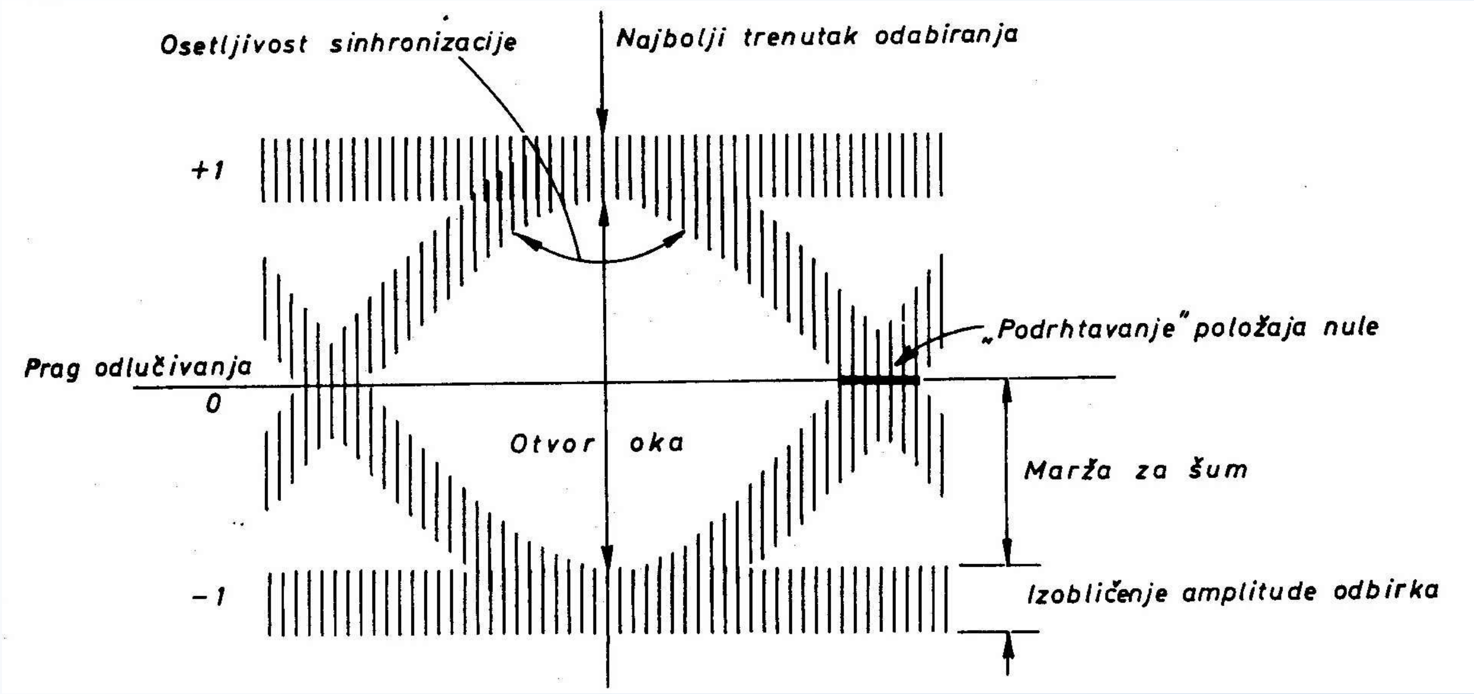




Međutim, na drugoj strani veze primljeni signal je izobličen i može da ima formu kao na slici, pa preklopljeni tragovi ovog signala na ekranu osciloskopa izgledaju drugačije:



Ovi djelovi signala iz pojedinih signalizacionih intervala koji su preklopljeni jedan preko drugog daju **dijagram oka**. Naravno, ako se uzme duga povorka impulsa, mnoge linije će se preklopiti i obrazovaće se zadebljani tragovi. Oni su prikazani kao osjenčene površine na slici.



<u>Otvor oka govori o tome kolika je intersimbolska interferencija</u>: što je otvor oka veći to je interferencija manja. Isto tako, širina otvora daje indikaciju o tome koliki je vremenski interval u kome je moguće izabrati trenutak odabiranja.Konkretno, ta širina govori o osetljivosti sistema u pogledu tačnosti sinhronizacije: što je otvor širi, sistem je manje osetljiv na grešku u sinhronizaciji. Najbolji trenutak odabiranja je tamo gdje je otvor oka najveći.

Sa slike se vidi da položaji tačaka u kojima signal prolazi kroz nulu nisu na istom mjestu, već obrazuju jednu zonu. To je bitno jer se u mnogim sistemima referentni signal takta (sinhronizacije) za prijemni odabirač uzima iz samog primljenog digitalnog signala i to baš na osnovu njegovih presjeka sa nultom osom. Kako uslijed intersimbolske interferencije položaj tih presjeka sa nulom varira, to se kaže da greška u prenosu u ovom slučaju potiče od podrhtavanja takta prijemnog odabirača.

Debljina osjenčenih tragova govori o izobličenju amplitude odbiraka.

Rastojanje od linije koja označava prag odlučivanja pa do najbliže ivice traga, do one koja se nalazi sa unutrašnje strane otvora oka, predstavlja maržu za šum u dotičnom trenutku odabiranja. Naime, dokle god je šum manji od ove vrijednosti, on i kad se superponira amplitudi odgovarajućeg odbirka, još uvijek ne utiče na ispravnost donesene odluke.

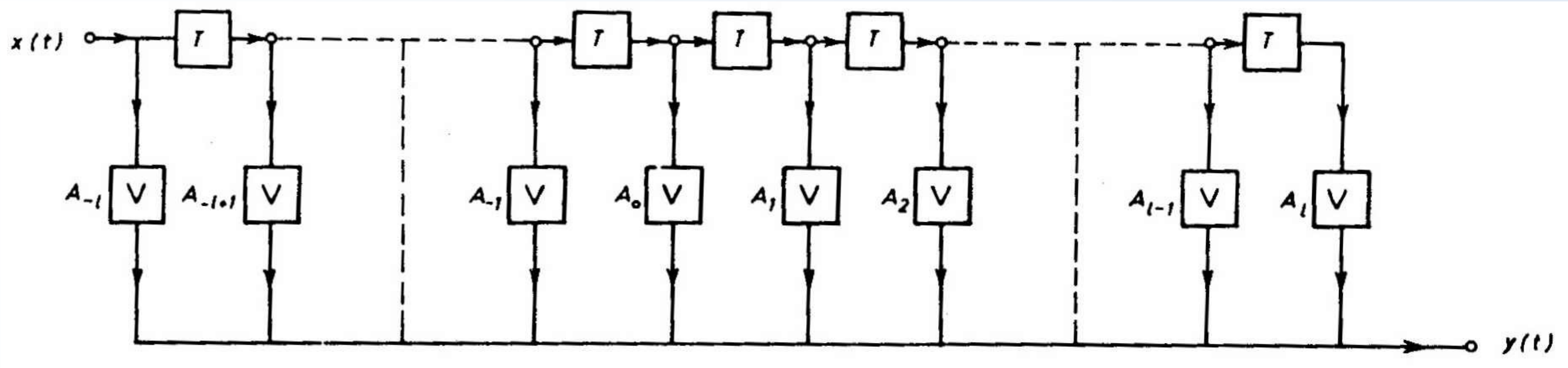
Ovdje je bilo riječi o dijagramima oka za slučaj kad se oni snimaju pri prenosu binarnih signala. Isto tako je moguće snimati ove dijagrame i kada se radi o M-arnim signalima, samo se u tom slučaju dobija M-1 oblik oka jedan ispod drugog.

PROBLEM KOREKCIJE I TRANSVERZALNI FILTAR

Prethodna izlaganja pokazala su da funkcija prenosa sistema treba da bude realizovana u skladu sa Nyquist-ovim kriterijumima kako u njemu ne bi došlo do intersimbolske interferencije. Međutim, ti uslovi nikada ne mogu idealno da se ostvare. Nesavršenost u izgradnji filtara za oblikovanje impulsa, nepoznavanje tačnih karakteristika kanala, njihove varijacije u vremenu, čine da je gotovo uvijek neophodno da se vrši korekcija funkcije prenosa sistema. Ta korekcija ima za cilj da se amplitudska i fazna karakteristika sistema u praktičnim uslovima dovedu na onaj oblik koji zahtijevaju Nyquist-ovi kriterijumi, ili, koji im je bar toliko blizak da se i u tim realnim uslovima intersimbolska interferencija može smatrati zanemarljivom.

Ovaj zadatak obavlja se pomoću korektora, odnosno tzv. ***transverzalnog filtra***. Osnovnu ideju za njegovu konstrukciju dao je još 1940. godine *Kallmann* (***Kallmann-ov filtar***). S obzirom na njegovu adaptabilnost on se koristi gotovo u svim sistemima za prenos podataka. Relativno je jednostavan i sastoji se od kaskadne veze četvoropola označenih sa T koji predstavljaju liniju za kašnjenje. Postavljeni su na jednakim rastojanjima, tako da kašnjenje između dva susjedna izvoda iznosi T (T je trajanje signalizacionog intervala). Ukupno ima $(2l + 1)$ ovakvih izvoda.

Blok šema transverzalnog filtra je prikazana na slici.:



Signal uzet sa svakog izvoda prolazi kroz njemu odgovarajući pojačavač. Pojačanja pojačavača A_{-l}, A_{-l+1}, ..., A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_l mogu da se podešavaju i po svom iznosu i po znaku (pojačanje može biti manje od 1). Izlazni signali iz svih pojačavača se sabiraju i tako daju rezultantni izlazni signal.

Ako označimo ulazni signal u transverzalni filtar sa *x*(t), a njegov izlazni signal sa *y*(t), biće:

$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l} A_k x[t-(k+l)T]$$

Ako se sa X(jω) označi Fourier-ova transformacija signala *x*(t), a sa Y(jω) Fourier-ova transformacija signala *y*(t), onda će funkcija prenosa transverzalnog filtra biti:

$$H_K(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=e^{-jlT\omega}\sum_{k=-l}^{l}A_k e^{-jkT\omega}=e^{-jlT\omega}H_k(j\omega)$$

Gornji izraz se sastoji iz dva karakteristična dijela:
Prvi njegov faktor $e^{-jlT\omega}$ opisuje komponentu fazne funkcije koja linearno zavisi od učestanosti, kojom se unosi konstantno kašnjenje *lT.* Drugi faktor

$$H_k(j\omega)=\sum_{k=-l}^{l}A_k e^{-jkT\omega}$$

predstavlja periodičnu funkciju po ω čija je perioda 2π/T. Oblik ove funkcije zavisi od kašnjenja T i koeficijenata A_k.
Prema tome, pogodnim izborom kašnjenja T, koeficijenata A_k i njihovim ukupnim brojem (2*l*+1), može se podešavati oblik funkcije $H_k(j\omega)$ u opsegu učestanosti $|f|\leq 1/2T$ koji odgovara jednoj njenoj periodi 2π/T. Zato transverzalni filtar i može da obavi ulogu korektora.

Ako sistem prenosa ima funkciju prenosa $H_s(j\omega)$, a prema Nyquist-ovom kriterijumu je potrebno da ona bude $H(j\omega)$, onda se kaskadnim vezivanjem transverzalnog filtra i sistema prenosa dolazi do relacije:

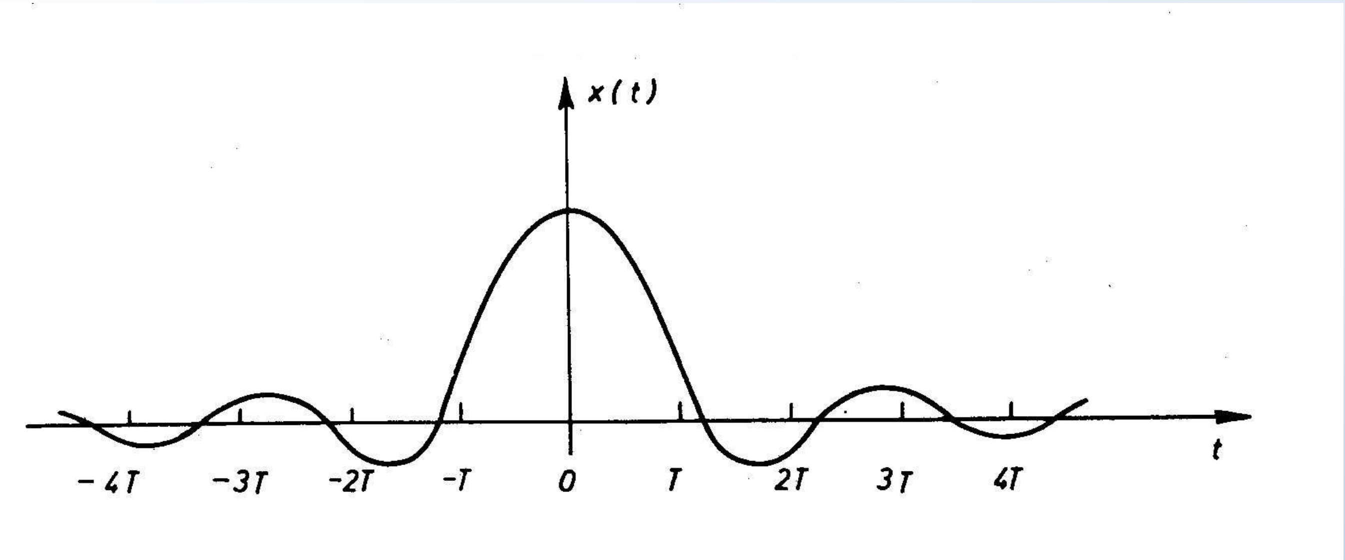
$$H_s(j\omega)H_K(j\omega) \cong e^{-jlT\omega}H(j\omega)$$

Ona omogućava da se dimenzioniše transverzalni filtar. Ako se uvrsti dobijeni izraz za H_K, dobija se:

$$H_k(j\omega) = \sum_{k=-l}^{l} A_k e^{-jkT\omega} \cong \frac{H(j\omega)}{H_s(j\omega)} = F(j\omega)$$

U gornjim relacijama stavljen je znak približnosti jer se radi o aproksimaciji. U stvari od funkcije $F(j\omega)$ uzeće se dio koji se nalazi u intervalu $|\omega| \leq \pi/T$, i od njega će se napraviti periodična funkcija. Njenim razvijanjem u Fourier-ov red dobija se izraz koji kada se izjednači sa sumom iz gornjeg izraza omogućava da se metodom identifikacije odrede koeficijenti A_k. Istovremeno, moći će se procijeniti koliko koeficijenata treba uzeti u obzir za željenu aproksimaciju (odrediće se broj *l*). Što je *l* veće biće i aproksimacija bolja.
Prema tome, kada se pronađu koeficijenti A_k biće određeni pojačavači, a kad se odredi *l* znaće se i linija za kašnjenje, pa će i transverzalni filtar u potpunosti biti određen.

Ilustracije radi, pokažimo kako se transverzalnim filtrom kao korektorom može obezbijediti da se u nekom sistemu prenosa zadovolji Prvi Nyquist-ov kriterijum. Pretpostavimo da je odziv toga sistema na digitalni signal koji je poslat u jednom signalizacionom intervalu čije je trajanje T kao na slici:



Odmah se vidi da Prvi Nyquist-ov kriterijum nije ispunjen i da u tačkama odabiranja t=*m*T, gdje je *m*=±1, ±2, ... postoji intersimbolska interferencija.
Ako datom sistemu prenosa kaskadno vežemo transverzalni filtar i ako se sistem pobudi signalom *x*(t), na izlazu se dobija se signal *y*(t) u obliku:

$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l} A_k x[t-(k+l)T]$$

Prvi Nyquist-ov kriterijum će biti zadovoljen ako y(t) zadovoljava uslov da je:

$$y[(m+l)T]=\begin{cases} y_0, & \mathrm{m}=0 \\ 0, & \mathrm{m}=\pm 1,\pm 2,\pm\cdots \end{cases}$$

Medutim, ovaj uslov upotrebom transverzalnog filtra ne može da se zadovolji u svim tačkama mT, već samo u onoliko tačaka koliko grana ima filtar, tj. Nyquist-ov kriterijum može da se zadovolji u konačnom broju tačaka (2l+1). Tada uslov glasi:

$$y[(k+l)T]=\begin{cases} y_0, & \mathrm{k}=0 \\ 0, & \mathrm{k}=\pm 1,\pm 2,\pm\cdots\pm l \end{cases}$$

Ako se, sada, ovaj uslov uvrsti u opšti izraz za odziv sistema i za zadato x(t) napiše za svako k, dobiće se (2l+1) simultanih linearnih jednačina iz kojih se mogu pronaći svi koeficijenti A_k. Na taj način je osigurano da u 2l tačaka odabiranja odziv y(t) ima vrijednost nula.

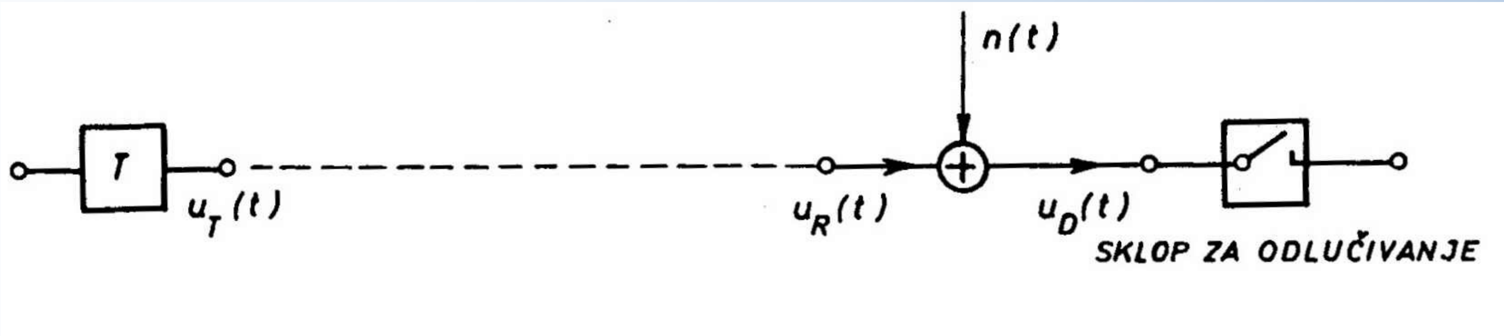
UTICAJ SLUČAJNOG ŠUMA NA PRENOS DIGITALNIH SIGNALA U OSNOVNOM OPSEGU UČESTANOSTI

Pored pojave intersimbolske interferencije, drugo važno pitanje u analizi prenosa digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti odnosi se na izučavanje uticaja šuma.

Slučajan šum je neminovno prisutan na ulazu svakog prijemnika. Po svojoj prirodi, to je slučajan proces koji slijedi Gaussov zakon raspodjele amplituda i koji se može statistički opisati funkcijom gustine vjerovatnoće, datom sa:

$$p(U_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 \text{ - varijansa, } \sigma^2 = U_{Neff}^2 = \overline{U_N^2}$$

Blok šema sistema za prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti je:



Na ulazu u prijemnik, slučajni šum se superponira signalu, pa se zato često i kaže da je to ***aditivni šum***. Tako sabrani signal i šum stižu na ulaz sklopa za odlučivanje.
Ako sa $u_R(t)$ označimo signal na ulazu tog sklopa, a sa $n(t)$ šum, onda će signal na osnovu koga se donosi odluka biti:

$$u_D(t)=u_R(t)+n(t)$$

Razmatraćemo one signale kod kojih je značajni parametar njihova amplituda u datom trenutku vremena. To znači da se u sklopu za odlučivanje uzimaju odbirci ovog signala u svakom signalizacionom intervalu i porede sa nekom referentnom vrijednošću na osnovu čega se donosi odluka o vrijednosti značajnog parametra.
Ako sa $t=mT$, gdje je $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$ označimo trenutke odabiranja, onda će amplituda odbiraka u tim trenucima biti:

$$u_D(mT)=u_R(mT)+n(mT)$$

Jasno je da u zavisnosti od toga koliki je relativni iznos amplitude odbirka šuma u odnosu na amplitudu odbirka signala, uzeti odbirak može da bude toliko izmijenjen da prijemnik donese pogrešnu odluku. Kvantitativna ocjena ovog efekta se izražava **vjerovatnoćom greške**. Na osnovu nje se međusobno mogu porediti različiti sistemi, ali vjerovatnoća greške kao kvantitaivni pokazatelj performansi pruža i mogućnost da se sagleda uticaj raznih parametara sistema i da se njenom minimizacijom optimizuje cijeli sistem.

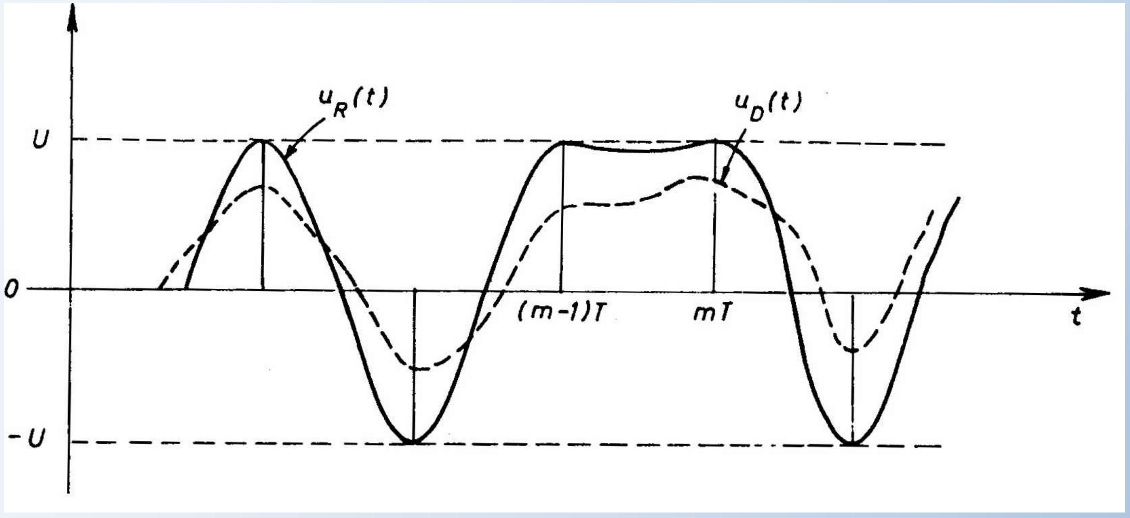
VJEROVATNOĆA GREŠKE PRI ODLUČIVANJU

Vjerovatnoća greške u odlučivanju biće analizirana za slučajeve prenosa u osnovnom opsegu učestanosti tri vrste digitalnih signala:

1. polarni binarni,
2. unipolarni binarni
3. M-arni signal

1. <u>Polarni binarni signal</u>

   Pretpostavimo da polarni binarni signal $u_R(t)$ na ulazu u sklop za odlučivanje izgleda kao na slici. Neka u trenucima odabiranja amplituda ovog signala $u_R(mT)$, kao značajan parameter, ima jednu od dvije moguće vrijednosti $u_R(mT) = \pm U$.



Na istoj slici prikazan je i signal u_D(t) koji je dobijen superpozicijom korisnog signala i šuma.

Neka je vjerovatnoća da predajnik šalje binarni digit + 1, predstavljen amplitudom odbirka na prijemu U, jednaka P(U), a vjerovatnoća da šalje digit -1, predstavljen amplitudom –U, P(-U). Važi da je P(U)+ P(-U)=1.

Osim toga, pretpostavimo da na ulazu u sklop za odlučivanje šum *n*(t) predstavlja Gaussov slučajni proces čija je srednja vrijednost jednaka 0. On je okarakterisan funkcijom gustine vjerovatnoće:

$$p(U_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}$$

Razmatrajmo dvije situacije:

1. Predajnik uzastopno šalje binarnu jedinicu kojoj odgovara amplituda odbirka signala $u_R(mT)$=U. Sklopom za odlučivanje u regularnim trenucima vremena t=*m*T uzimaju se odbirci ulaznog signala u_D(t). Vrijednost ovih odbiraka će biti:

$$u_D(mT)=u_R(mT)+n(mT)=U+n(mT)$$

Kako je amplituda odbiraka šuma slučajna veličina, to će i amplituda odbiraka $u_D(mT)$ takođe biti slučajna veličina. Ako označimo ove slučajne veličine na sledeći način:

$$n(mT) = u_N \qquad u_D(mT) = u_D$$

biće:

$$u_D=U + u_N$$

Raspodjela amplituda odbiraka u_D , kao nove slučajne promjenljive, može da se opiše odgovarajućom funkcijom gustine vjerovatnoće $q_U(u_D)$. Ona se dobija transformacijom poznate gustine vjerovatnoće $p(u_N)$:

$$q_U(u_D)du_D = p(u_N)du_N$$

Vjerovatnoća da se amplituda rezultantnog odbirka u_D nalazi između u_D i u_D+du_D mora biti jednaka vjerovatnoći da amplituda šuma u_N bude između u_N i u_N+du_N. Saglasno definiciji funkcije gustine vjerovatnoće, biće:

$$q_U(u_D) = p(u_D - U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D-U)^2}{2\sigma^2}}$$

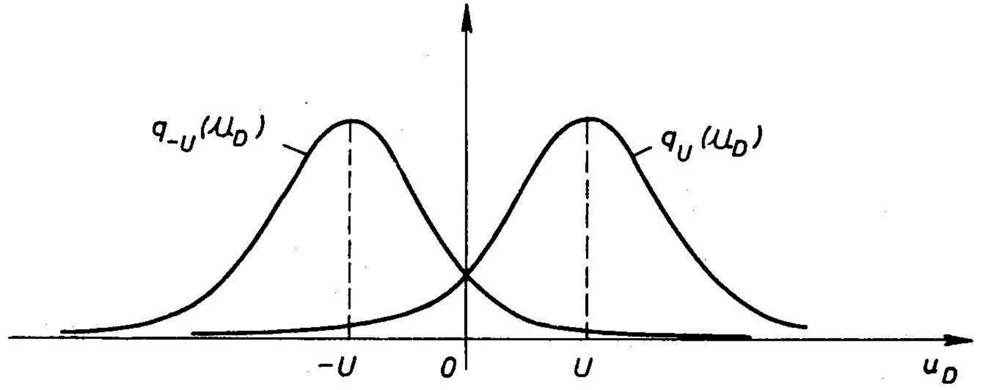
2. Predajnik uzastopno šalje binarnu nulu kojoj odgovara amplituda odbirka signala $u_R(mT)$= -U. Sklopom za odlučivanje u regularnim trenucima vremena t=mT uzimaju se odbirci ulaznog signala $u_D(t)$. Vrijednost ovih odbiraka će biti:

$$u_D = -U + u_N$$

tj. funkcija gustine vjerovatnoće amplituda uzetih odbiraka kada se šalje logička nula je:

$$q_{-U}(u_D) = p(u_D + U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D+U)^2}{2\sigma^2}}$$

Funkcije $q_U(u_D)$ i $q_{-U}(u_D)$ prikazane su na slici. Na osnovu ove dvije funkcije gustine vjerovatnoće možemo odrediti vjerovatnoću bilo koje vrijednosti amplituda.



Sa slike je jasno da su u principu moguće sve vrijednosti amplituda odbiraka u_D , pa se postavlja pitanje kako programirati postupak za donošenje odluke u sklopu za odlučivanje.

Prije svega, pretpostavimo da je, u nekoj dugoj povorci koju predajnik šalje, vjerovatnoća sa kojom se pojavljuje jedan bit jednaka vjerovatnoći sa kojom se pojavljuje drugi bit (P(U) = P(-U) = 1/2). Zaključak je da prag odluke u sklopu za odlučivanje treba postaviti na sredinu mogućih vrijednosti. Kako su te vrijednosti +U i -U, onda se za prag uzima vrijednost 0. Dakle, prijemnik će raditi tako što će svaki odbirak čija je amplituda $u_D>0$ interpretirati kao binarnu brojku 1, a svaki odbirak čija je amplituda $u_D<0$ biti proglašen za -1.

Uslijed prisustva šuma može doći do greške, koja će nastupiti svaki put kada se šalje binarna cifra 1, a amplituda napona odbirka bude $u_D < 0$,kao i kada se šalje -1, a amplituda bude $u_D>0$. Analitički se ove greške izražavaju uslovnom vjerovatnoćom.

Ako se ša1je “1” amplituda odbirka korisnog signala iznosi U, pa uslovna vjerovatnoća da prijemnik donese pogrešnu odluku, tj. da je poslata cifra bila –1 iznosi:

$$P(-1|U) = P[(u_D < 0|U] = \int_{-\infty}^{0} q_U(u_D)du_D$$

U drugom slučaju greška nastaje ako se šalje binarna brojka –1 (amplituda korisnog signala iznosi –U), tako da uslovna vjerovatnoća da prijemnik pogriješi tako što će odlučiti da je poslata cifra bila 1, glasi:

$$P(1|-U) = P[(u_D > 0|-U] = \int_{0}^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

Sada će ukupna vjerovatnoća greške biti:

$$P_e = P(U)P(-1|U) + P(-U)P(1|-U)$$

Gore navedeni integrali su jednaki, tj. važi da je:

$$\int_{-\infty}^{0} q_U(u_D)du_D = \int_{0}^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

Kako je $P(U)=P(-U)=\frac{1}{2}$, konačno se dobija:

$$P_e=\int_0^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

$$P_e=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(u_D+U)^2}{2\sigma^2}}du_D=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} e^{-z^2}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}erf\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Uzimajući u obzir da je *erfc x* = 1- *erf x* komplementarna funkcija greške, konačno vjerovatnoću greške možemo da zapišemo u obliku:

$$P_e=\frac{1}{2}erfc\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Napomena: U *je* razlika amplitude odbirka signala i vrijednosti na koju je postavljen prag odlučivanja, odnosno predstavlja ***polovinu razlike amplituda odbiraka*** koji odgovaraju binarnim simbolima + 1 i -1, a ***ne apsolutnu vrijednost odbirka.***

2. Unipolarni binarni signal

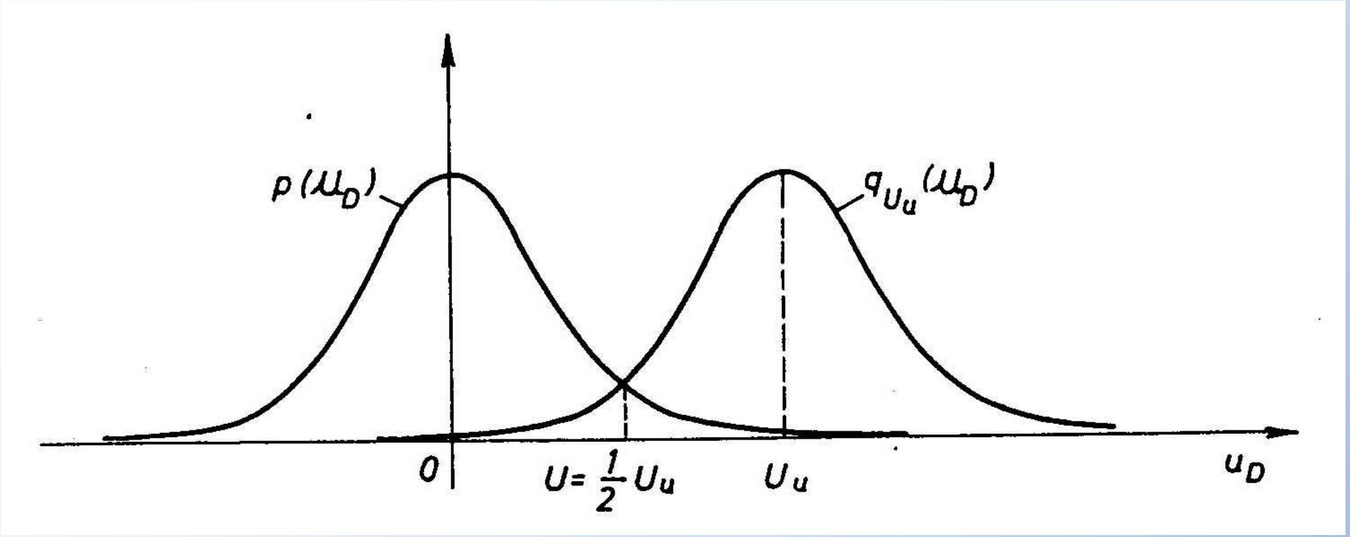
Pretpostavimo da predajnik šalje unipolarni binarni signal. Neka binarnoj "1" odgovara amplituda odbirka korisnog signala $u_R(t)$ na ulazu u sklop za odlučivanje jednaka U_u, a binarnoj "0" odgovara amplituda odbirka jednaka 0. Tada će amplituda odbirka rezultantnog signala $u_D(t)$ u slučaju da se šalje binarna "1" biti:

$$u_D = U_u + u_N \quad ,$$

a u slučaju da se šalje binarna "0":

$$u_D = u_N$$

Ovim slučajnim promjenljivim odgovaraju funkcije gustine vjerovatnoće prikazane na slici:



Ako predajnik šalje i jedan i drugi binarni simbol sa jednakom vjerovatnoćom, onda će važiti relacija:

$$P(U) = P(0) = \frac{1}{2}$$

pa se opet intuitivno dolazi do zaključka da prag u sklopu za odlučivanje treba postaviti na sredinu između dvije očekivane vrijednosti U_u i 0, tj. prag će biti postavljen na vrijednost:

$$U = \frac{1}{2} U_u$$

Daljom analizom se dolazi do izraza za vjerovatnoću greške:

$$P_{\mathrm{e}} = P(\mathrm{U_u}) P(0 | \mathrm{U_u}) + P(0) P(1 | 0)$$

Važi da je:

$$P(0 | U_u) = P\left[u_D < \frac{U}{2} \middle| U \right] = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}U_u} q_{U_u}(u_D)\, du_D$$

i:

$$P(1 | 0) = P\left[u_D > \frac{U}{2} \middle| 0 \right] = \int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} p(u_D)\, du_D$$

Površine definisane sa ova dva integrala su jednake, tj. P(1|0)= P(0|1), i P(0)=P(1)=1/2, pa je:

$$P_e = \int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} p(u_D)du_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} e^{-\frac{U_D^2}{2\sigma^2}}du_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{U_u}{2\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}erf\,\frac{U_u/2}{\sqrt{2}\sigma}$$

Konačno se dobija da je:

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\frac{U_u/2}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2}erfc\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Vjerovatnoća greške u slučaju prenosa unipolarnog signala zavisi od karakteristike prisutnog šuma (σ) i polovine razlike amplituda odbiraka koji odgovaraju binarnim digitima 1 i 0, odnosno razlike amplituda odbirka signala (U_u ili 0), i vrijednosti na koju je postavljen prag odlučivanja ($U=U_u/2$).

3. M-arni signal

Pretpostavimo da predajnik šalje M-arni digitalni signal. Amplituda odbirka ovakvog signala može da ima jednu od M različitih vrijednosti. Neka su one uniformno raspoređene tako da se bilo koje dvije susjedne vrijednosti na ulazu u sklop za odlučivanje razlikuju za konstantnu vrijednost 2U. Pretpostavimo još i da se svi simboli u poruci šalju sa istom vjerovatnoćom (P_i=1/M). U ovim uslovima pragovi odlučivanja se postavljaju na sredinu izmedu dvije susjedne vrijednosti amplitude.

Do greške će doći u slučaju kad je amplituda odbirka šuma u_N manja od -U i veća od U. U prvom slučaju prijemnik će pogrešno da donese odluku da je bila poslata neka niža vrijednost, a u drugom neka viša. Izuzetak su prvi i zadnji nivo, tj. slučaj kada odbirak ima najveću amplitudu i slučaj kada je amplituda odbirka najmanja. U tim slučajevima može da se griješi samo "na jednu stranu", tj. kada odbirak ima najveću amplitudu, samo amplitude odbiraka šuma u_N<-U prouzrokuju grešku; slično, kad odbirak ima najmanju amplitudu samo odbirci šuma čije su amplitude u_N > U dovode do greške.

Sada možemo da pronađemo izraz za vjerovatnoću greške.

Posmatrajmo prvi (najniži) nivo:
Vjerovatnoća da prvi simbol bude poslat je $\mathrm{P}_1 = \frac{1}{\mathrm{M}}$, a vjerovatnoća da šum bude manji od U je:

$$P(u_N < U) = \int_{-\infty}^{U} p(u_N)\,du_N$$

Vjerovatnoća da taj simbol bude ispravno primljen je:

$$P_1 = \frac{1}{M} P(u_N < U) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{U} p(u_N)\,du_N$$

Za najviši, M-ti nivo se na sličan način dolazi do izraza za vjerovatnoću da M-ti simbol bude ispravno primljen:

$$P_M = \frac{1}{M} P(u_N > -U) = \frac{1}{M} \int_{-U}^{\infty} p(u_N)\,du_N$$

Za sve ostale simbole vjerovatnoća da budu ispravno primljeni je:

$$P_2 = \frac{1}{M} P(-U < u_N < U) = \frac{1}{M} \int_{-U}^{U} p(u_N) du_N = P_3 = \ldots = P_{M-1}$$

Ukupna vjerovatnoća ispravnog prijema je data sa P_K:

$$P_K = P_1 + P_2 + \cdots + P_{M-1} + P_M = \frac{1}{M}\left[\int_{-\infty}^{U} p(u_N) du_N + (M-2)\int_{-U}^{U} p(u_N) du_N + \int_{-U}^{\infty} p(u_N) du_N\right] =$$

$$= \frac{1}{M}\left[1 + 2(M-1)\int_{0}^{U} p(u_N) du_N\right]$$

Ako uzmemo u obzir da $p(u_N)$ predstavlja Gaussovu raspodjelu, tj.

$$p(u_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}$$

Konačno se dobija da je vjerovatnoća ispravnog prijema data izrazom:

$$P_K = \frac{1}{M}\left[1 + (M-1)\,erf\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}\right]$$

Vjerovatnoća greške se sada dobija kao:

$$P_e = 1 - P_K = \frac{M-1}{M}\,erfc\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

pod uslovom da se svi simboli javljaju sa istom vjerovatnoćom.

Za M=2 dobija se:

$$P_e = \frac{1}{2}\,erfc\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2}\,erfcA$$

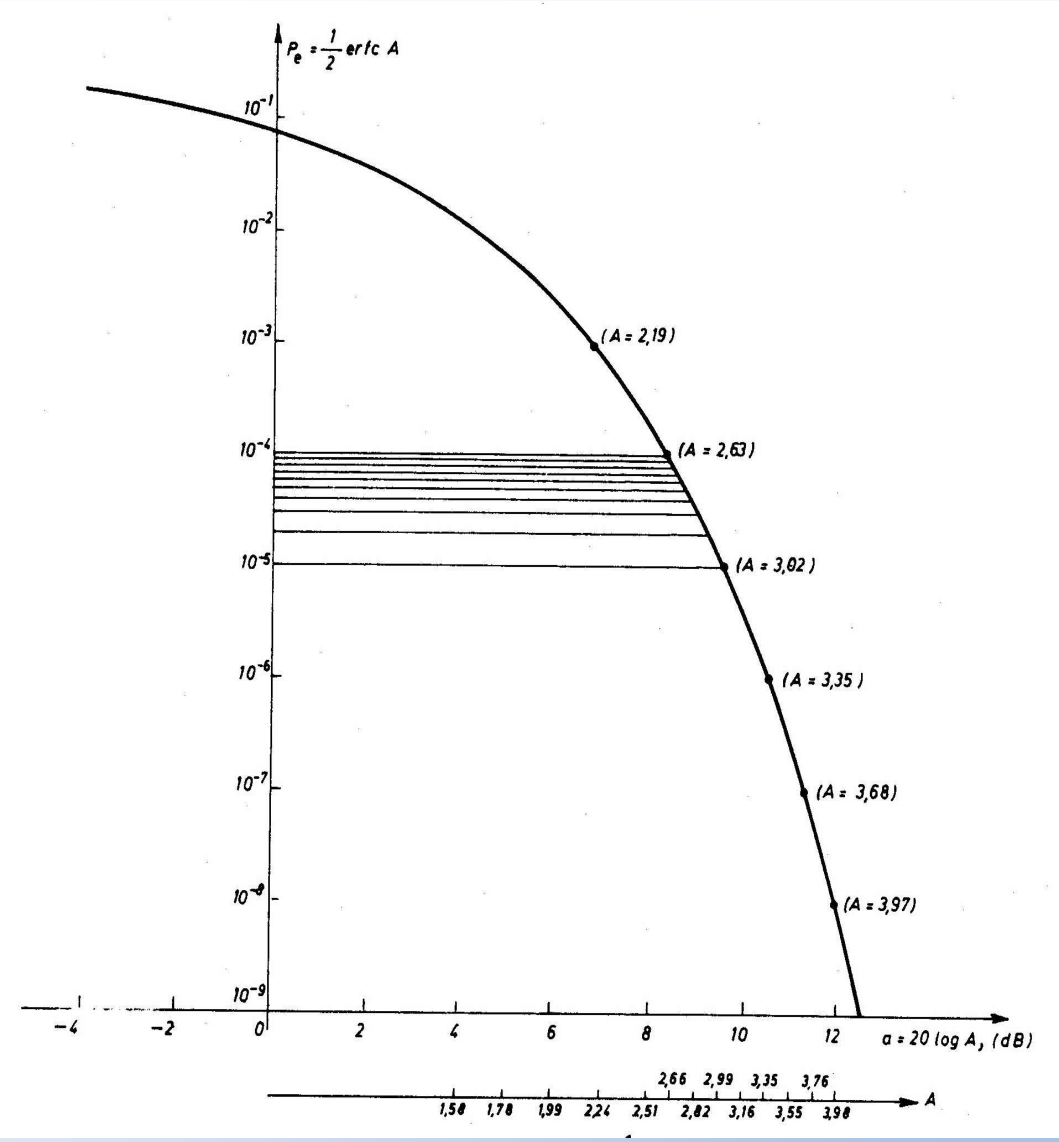
što je u skladu sa izračunatom vrijednošću za polarne binarne signale. Argument komplementarne funkcije greške A zavisi od polovine rastojanja između dva susjedna nivoa, kao i karakteristika šuma.

Zaključak:

Izvedena su tri značajna izraza koja omogućavaju da se izračuna vjerovatnoća greške u prenosu poruka polarnim binarnim signalom, unipolarnim binarnim signalom i M-arnim signalom.

Upoređujući ih, vidi se da se vjerovatnoća greške u sva tri slučaja opisuje komplementarnom funkcijom greške.

U odgovarajućoj razmjeri na slici je prikazana grafička predstava funkcije pomoću koje se u bilo kom od razmatranih slučajeva lako utvrđuje vjerovatnoća greške.



Vjerovatnoća greške uvijek zavisi od odnosa U/σ, gdje je U razlika amplitude odbirka signala i vrijednosti na koju je postavljen prag, a σ predstavlja efektivnu vrijednost šuma. I za jednu i za drugu veličinu, U i σ, relevantne su vrijednosti koje imaju na ulazu u sklop za odlučivanje. Na taj način, izvedene relacije uzimaju u obzir isključivo mehanizam donošenja odluke u prisustvu aditivnog bijelog Gaussovog šuma.

Kao što se vidi na prethodnoj slici ovaj odnos treba maksimizirati kako bi vjerovatnoća greške bila što manja. Međutim, u tom slučaju treba voditi računa i o nizu drugih faktora o čemu će naknadno biti riječi.